MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (Clase 01)

Departamento de Matemática Aplicada

Facultad de Ingeniería

Universidad Central de Venezuela

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz

Las matrices son de suma importancia en las ciencias, la ingeniería, la economía y otras ciencias aplicadas. Son útiles para representar datos en forma ordenada, para modelar problemas y resolver sistemas de ecuaciones, para indicar las interrelaciones que existen en los diferentes sectores de la economía (Matriz Insumo – Producto), entre otras.

Cotización del Oro
(Londres, US$/oz.)

	20-Mar-06	21-Mar-06	22-Mar-06	23-Mar-06	24-Mar-06
09:00	553.1	554.1	551.1	551.7	554.2
10:00	551.4	548.2	550.1	549.8	556.4
11:00	554.2	549.7	550.3	547.9	560.2
12:00	555.0	550.3	550.7	547.6	559.7

Matriz Insumo - Producto
Tabla de transacciones intersectoriales

	Sector de destino		
Sector de origen	1.- Agricultores	2.- Molinos y productores de insumos para agricultura	3.- Panaderías
1.- Agricultores	10	100	0
2.- Molinos y productores de insumos para agricultura	20	0	150
3.- Panaderías	0	0	0

Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos (números reales) ordenados en filas y columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} es el elemento situado en la i-ésima fila y en la j-ésima columna. La matriz tiene *m* filas y *n* columnas.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x5}$$

- ✓ B es una matriz de orden 2x5.

Matriz

Las matrices se designan con letras mayúsculas. Los elementos de la matriz se designan con la misma letra pero minúscula y con dos subíndices: el primero indica la fila y el segundo la columna

Elemento que ocupa la fila 2 y columna 3

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$$

Diagonal principal de una matriz: son los elementos a_{ii}

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B del mismo orden son iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales.

$$A_{mxn} = B_{mxn} \Leftrightarrow \lfloor a_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor$$

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz fila y matriz columna

Las matrices filas son las de orden *1xn* y las matrices columnas son las de orden *mx1* *(vectores)*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

- ✓ A es una matriz fila.
- ✓ B es una matriz columna.

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz nula y matriz cuadrada

Una matriz mxn cuyas entradas son todas ceros de conoce como la matriz nula y se denota por 0_{nxm} o solo por 0.
Tenga cuidado que no confunda la matriz cero con el número cero.

Ejemplo: **La matriz cero 2x3 es;**

$$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada 3x3

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz diagonal y matriz identidad

Matriz diagonal: Es la matriz cuadrada $A_{nxn} = [a_{ij}]$ definida por:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$\lambda_i \in R$

Matriz identidad: Es un caso particular de la matriz diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal y matriz identidad

Existe una matriz identidad para cada tamaño de matriz cuadrada nxn.

Ejemplos:

La matriz identidad 2x2 es;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad 3x3 es;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad 4x4 es;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz triangular

Matriz triangular inferior: es una matriz cuadrada cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$a_{ij} = 0, \ \forall i < j$$

Matriz triangular superior: es una matriz cuadrada cuyos elementos situados por debajo de la diagonal principal son todos iguales a cero.

$$a_{ij} = 0, \ \forall i > j$$

Matriz triangular

Una matriz triangularizada por arriba es;

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Una matriz triangularizada por abajo es;

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz traspuesta

Dada una matriz $A_{mxn} = [a_{ij}]$, se llamará matriz traspuesta de A a la matriz que resulta de intercambiar en A las filas por columnas. Esta matriz estará denotada por $A^t_{nxm} = [a_{ji}]$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) $\left(A^t\right)^t = A$

2) $\left(kA\right)^t = kA^t,\ k \in R$

3) $\left(A \pm B\right)^t = A^t \pm B^t$

4) $\left(A.B\right)^t = B^t.A^t$

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Matriz simétrica y matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada A se llama simétrica si $A^t = A$ y antisimétrica si $A^t = -A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & -7 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ A es una matriz simétrica, pues $A^t = A$.
- ✓ B es una matriz antisimétrica, pues $B^t = -B$.

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Adición y sustracción de matrices

Dadas las matrices $A_{mxn} = [a_{ij}]$ y $B_{mxn} = [b_{ij}]$ del mismo orden, la suma (A+B) o diferencia (A-B) es una matriz cuyos elementos son las sumas o diferencias de cada uno de los elementos respectivos de las matrices.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \quad ; \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

Propiedades

1ª. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — ***Propiedad Asociativa***

2ª. $A + B = B + A$ — ***Propiedad conmutativa***

3ª. $A + 0 = A$ (0 es la matriz nula) — ***Matriz Nula***

4ª. **La matriz $-A$, que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de A, recibe el nombre de matriz opuesta de A, ya que $A + (-A) = 0$.**

Ejercicios

1. Suma las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & 4 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Resta las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntos a tratar

1. Definición de matriz
2. Matriz fila y matriz columna
3. Matriz nula y matriz cuadrada
4. Matriz diagonal y matriz identidad
5. Matriz triangular
6. Matriz traspuesta
7. Matriz simétrica y matriz antisimétrica
8. Adición y sustracción de matrices
9. Multiplicación de un escalar por una matriz

Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz es otra matriz kA que se obtiene multiplicando cada elemento de A por k.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{si } k = 4 \ \text{ se tiene} : kA = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 12 \\ 20 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1ª. $k(A + B) = kA + kB$ — ***Propiedad distributiva 1ª***

2ª. $(k + h)A = kA + hA$ — ***Propiedad distributiva 2ª***

3ª. $k[hA] = (kh)A$ — ***Propiedad asociativa mixta***

4ª. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$ — ***Elemento unidad***

Ejercicios

Construya una matriz $A = [a_{ij}]$, si A es de orden 3x2 donde $a_{ij} = 4i + 2j$

Construya la matriz $B = [b_{ij}]$ si B es de orden 2x2 y $b_{ij} = (-1)^{i+j}(i^2 + j^2)$

Si $A = [a_{ij}]$ es de orden 12x10, ¿cuántas entradas tiene A? Si $a_{ij} = 1$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, encuentre a_{33}, a_{52}, $a_{10,10}$ y $a_{12,10}$

Ejercicios

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule:

- $3A^T + D$
- $(B - C)^T$
- $(D - 2A^T)^T$

"La confianza en si mismo es el primer secreto del éxito".

Emerson